第 31、32 讲 波 2

在一些特别情况下波的叠加存在着特别的性质，有必要对这些特性加以详细研究。

波的干涉

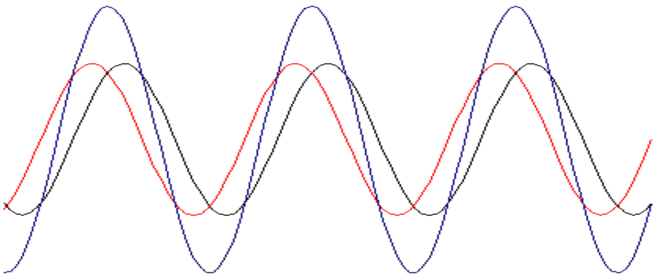
考虑两列频率波长相同的波，它们沿同一个方向传播，存在一个固定的相位差ϕ。分别为

$$y_1(x,t)=A\sin(kx-\omega t),\quad y_2(x,t)=A\sin(kx-\omega t+\phi)$$

根据波的叠加原理，当它们遇到一起后的合成波为

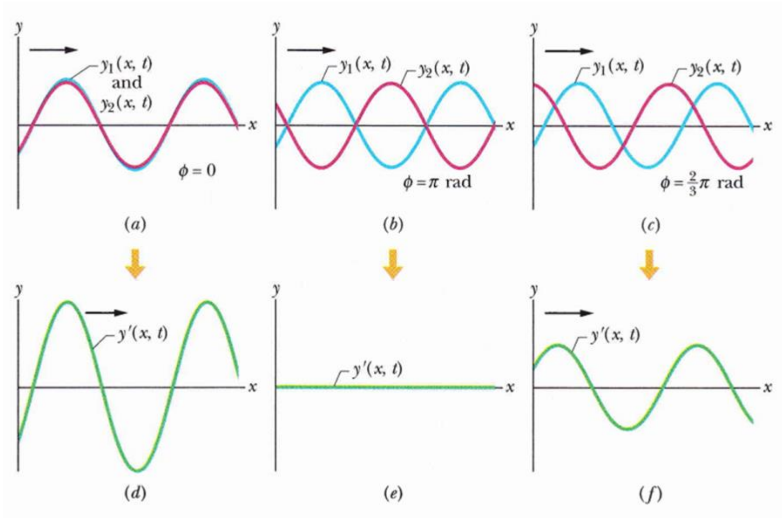
$$\begin{aligned}y(x,t)&=y_1(x,t)+y_2(x,t)\\&=A\sin(kx-\omega t)+A\sin(kx-\omega t+\phi)\\&=2A\cos\frac{\phi}{2}\sin\left(kx-\omega t+\frac{\phi}{2}\right)\end{aligned}$$

下图即为波形图：红色和黑色的波，加到一起就变成了蓝的波形，合成波与原波具有同样的频率和波长，但具有不同的振幅和相位。也就是说最大值的位置不一



样。

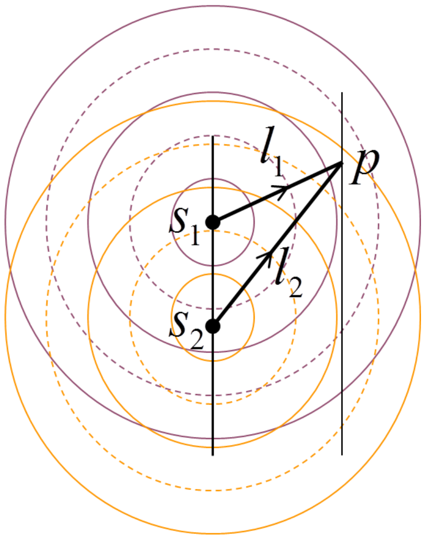
根据两个波的相位差，可以总结出几种典型的波形叠加：



- $\phi = 0$，两列波没有相位差，合成波和原波同相位，振幅加倍。
- $\phi = \pi$，两列波相位相反，相互抵消。
- $0 < \phi < \pi$，合成波相位介于原波相位中间，振幅为$2A\cos\frac{\phi}{2}$。

两点波源发出的波的叠加

前面考虑的都是一维振动的波，现在考虑类似水波这种在二维平面中传播的波。水波以圆形扩散出去，也是类似周期性的，比如下图：实线是波峰的地方，虚线是波谷的地方。对于任意一点 P，从S_1和S_2发出的波在这一点的振动模式分别为：



$$y_{1P} = y_0 \sin(kl_1 - \omega t + \phi)$$

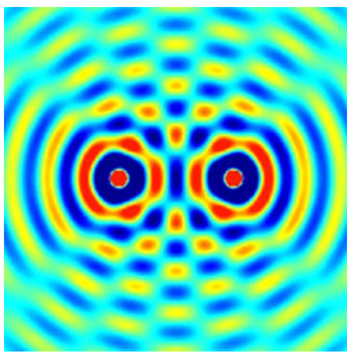
$$y_{2P} = y_0 \sin(kl_2 - \omega t + \phi)$$

这两个表达式和球面波准确的表达是有差距的。由于能量守恒的问题，传播得越远，波所传播面积越大，则单位体积或面积中的能量必然越小。对于二维的球面波，其振幅应该多一个$1/\sqrt{l}$的因子。为了简化讨论，目前暂时不考虑能量的损失。P 点处的合成波为

$$y_P = y_{1P} + y_{2P} = 2y_0 \cos\left(k\frac{l_1 - l_2}{2}\right)\sin\left(k\frac{l_1 + l_2}{2} - \omega t + \phi\right)$$

$$= 2y_0 \cos\left(k\frac{\Delta l}{2}\right)\sin\left(k\frac{l_1 + l_2}{2} - \omega t + \phi\right)$$

上式表明对于任意 P 点仍是同频率的振动，但振幅为



$2y_0\cos\left(k\frac{\Delta l}{2}\right)$，$\Delta l$为 P 点到两点源的距离差，它随着 P 点的不同而不同。也就是说在空间各个点，它的振幅是不一样的。空间的距离差是波长的整数倍的时候，正好是两个波等相位叠加。其振幅为$2y_0$；而如果距离差是波长的整数倍再加上半个波长，则正好是两个波反相位叠加，其振幅为零。前者称为相长干涉，后者为相减干涉。因此对于两点源的情况，会看到空间中各点有稳定的振动模式。右图为某个时刻两点源的干涉图，黄色和蓝色是振幅最大的地方，绿色是不动的地方。对于振幅加倍的点，其能量是原来的四倍，而对于振幅为零的点，其能量为零。因此在干涉的过程中能量在空间里进行了重新分配。

驻波

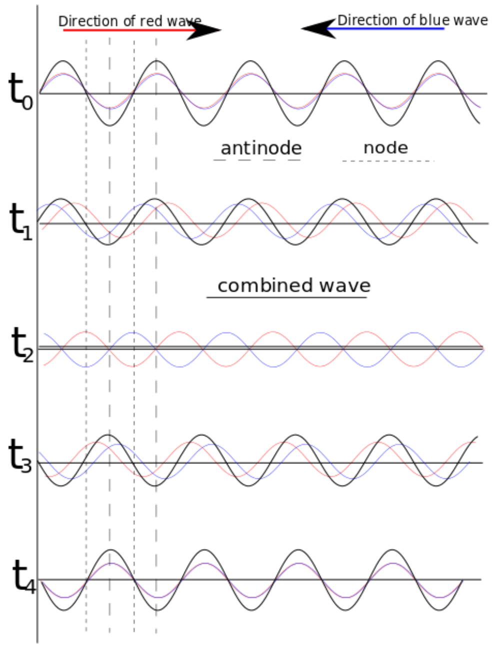
现在考虑两列同频率，同波长的波相向运动，即两列波分别为

$$y_1 = y_0\sin(kx - \omega t + \phi)$$

$$y_2 = y_0\sin(kx + \omega t + \phi)$$

则合成波为

$$y(x,t) = 2y_0\sin\left(kx + \frac{\phi}{2}\right)\cos\left(\omega t + \frac{\phi}{2}\right)$$



此时可以看到在合成波中，空间部分和时间部分分离开了，分别处于两个相乘的三角函数之中。对于任意时刻，空间的各点都会有固定振动模式，只是在不同的时刻，每点的振幅不同而已。在某个时刻振幅最大的点在其他时刻振幅也是最大的。在某个时刻振幅为零的点在其他时刻振幅也为零。这样的波看上去是在空间中“冻结”起来了，不再向左运动或向右运动（见右图中的黑线）。因此我们把这样的波称为**驻波**，意思是不运动的波，也称为**静态波**。其中振幅最大的点称为**波腹**，这幅为零的点称为**波节**。驻波是非常常见的波现象，如我们听到的乐器中发出的声波，微波炉中的电磁波等等。需要注意的是相邻波腹或相邻波节间的距离为$\lambda/2$。

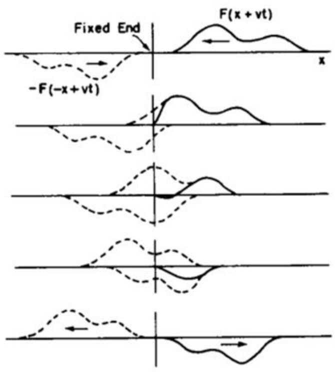
波的反射

当波遇到了障碍物，就可能会被反射回来，如声音遇到墙会反射，光照到物体上也会反射。由于边界条件的不同，反射回来的波和入射的波之间的关系也会有不同。

- 固定边界条件(硬边界)。在一端固定的弦上传播一个波时，波遇到了固定点会发生反射。对于固定点而言，那点的弦是不能振动的。因此有边界条件

$$y(x=0,t)=0$$

这里假设固定点的坐标为$x=0$。入射波和反射波沿着相反的方向运动，假设入射波为$F(x-vt)$，它是由左向右运动；反射波为$G(x+vt)$，它是由右向左运动的。则合成波为



$$y=F(x-vt)+G(x+vt)$$

根据边界条件可以得到

$$F(-vt)+G(vt)=0$$

因此可以得到

$$G(vt)=-F(-vt)$$

也就是说在边界处反射波的振动要始终与入射波相反。这就要求反射波要与入射波同频率，同振幅，也就是说应该有

$$G(x+vt)=-F(-x-vt)$$

则合成波为

$$y=F(x-vt)-F(-x-vt)$$

图为一列波入射后反射的示意图。反射波就如是从相反方向运动过来的一模一样的波，只是其大小与入射波而言是相反的。

- 开放边界条件（软边界）：当弦的一端没有固定，可以自由运动时称为开放边界条件或自由边界条件。由于对于自由端点而言如果存在张力，则该点的张力只在一个方向存在（即有弦的那一边）。那么该点在水平方向上就不可能受力平衡。因此自由边界条件为该点弦的形变为零，即

$$\frac{dy(x=0,t)}{dx}=0$$

合成波依然为

$$y = F(x - vt) + G(x + vt)$$

但此时的边界条件为

$$F'(-vt) + G'(vt) = 0$$

即

$$G'(vt) = -F'(-vt)$$

容易分析得到反射波应该为

$$G(x + vt) + F(-x - vt)$$

合成波为

$$y = F(x - vt) + F(-x - vt)$$

特定长度弦的波动

无论是固定边界条件还是自由边界条件，可以看到入射波和反射波具有相同振幅，相同频率和波长，但运动方向相反，根据前面对于驻波的分析可知，如果入射波为正弦波的话，则合成波为驻波。当波在一根有限长度的弦上振动时，会在两边的端点上发生反射，因此在有限长度的弦上稳定振动的波为驻波。

- 对于两端固定的弦，如吉他或小提琴上的琴弦，两个端点处都为固定边界条件，因此对于驻波而言两个端点处都必须是波节。由此可知满足这样条件的驻波波长λ和弦长L的关系为

$$L = n\frac{\lambda}{2}, \quad n = 1,2,3, \ldots.$$

- 对于一端固定，另一端自由的弦，如音叉，两个端点处一边为固定边界条件，一端为自由边界条件。因此对于驻波而言一个端点处为波节，另一端为波腹。由此可知满足这样条件的驻波波长λ和弦长L的关系为

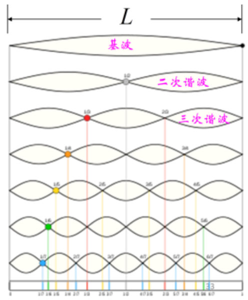
$$L = n\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}, \quad n = 0,1,2,3, \ldots.$$

由上面的分析可见，尽管对于弦来说，任意频率或波长的波都可以在上面传播，但当弦长固定，边界条件也确定的情况下，只有特定波长或频率的波才能在上面稳定传播。这也就是为什么当弹奏乐器时能听到特定频率的声音，而不是任意频率的声音。

谐波

尽管给定的长度和边界条件，在弦上稳定传播的波并不是仅有一个频率或波长，而是一系列的频率或波长。对于其中波长最长，频率最低的称为**基波**，相应的频率称为**基频**。对于两端固定的弦而言，基波为

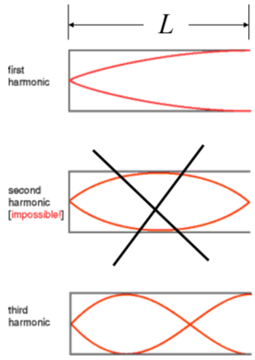
$$\lambda_1 = 2L,\ f_1 = \frac{v}{2L}$$



其他可容许的波，其波长为基波的整数分之一，频率为基频的整数倍，称为 n 次谐波

$$\lambda_n = \lambda_1/n\ ,\qquad f_n = nf_1$$

$$n = 1,2,3, \ldots$$



对于一端固定一端开放的弦，其基波为

$$\lambda_1 = 4L,\ f_1 = \frac{v}{4L}$$

n 次谐波为

$$\lambda_n = \frac{4L}{n},\ f_n = \frac{nv}{4L}$$

$$n = 1,3,5 \ldots.$$

需要注意的是在这种情况下是没有偶次谐波的。

对于乐器而言，一般来说我们听到的主要是基波，称为音调。由于乐器的材料和结构的不同，高次谐波在乐音中的比例不同，从而使得不同乐器又不同的音色。上面的讨论尽管是以弦振动为例的，但这些讨论是具有一般性的，对于其他情况的振动，如空气的振动，也成立。

拍

现在考虑两列具有不同频率，不同波长的波相遇叠加。两列波分别为

$$y_1 = A\sin(k_1 x - \omega_1 t)$$

$$y_2 = A\sin(k_2 x - \omega_2 t)$$

则合成波为

$$y = y_1 + y_2 = A\sin(k_1 x - \omega_1 t) + A\sin(k_2 x + \omega_2 t)$$

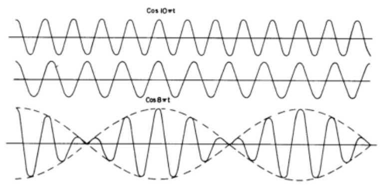
$$= 2A\cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2}x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\sin\left(\frac{k_1 + k_2}{2}x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$$

这时候的情况比较复杂，从形式上看可以认为是一个高频$\omega_h = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$的波在传播，

但其振幅在发生变化，其变化形式是另一个低频$\omega_l = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$的波。这被称为高频的波被低频的波所调制。

当这两列波的频率和波长相差不大时

$$\omega_1 \approx \omega_2 \approx \omega, \quad k_1 \approx k_2 \approx k$$



合成波变为

$$y = 2A\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)\sin(kx - \omega t)$$

这时候合成波看上去就像原来的波还在传播，但其振幅在缓慢的变化。这种现象被称为拍。

在乐器（如钢琴）调音时经常会利用拍的现象。由于一般的乐音频率都很高，如几百或几千赫兹。当琴音和标准音相差很小时，如仅差 1 赫兹，用耳朵分辨并不容易。如在敲响标准音叉的同时按下琴键，听到的就是标准音和琴音的合成。如果两个音有微小差别就会听到声音忽小忽大，也就是拍。这样就容易判断音是否调准了。

旁频带

在利用无线电波传播声音时其基本的原理也是拍。对于一个无线电波的调制波，其形式为

$$S = (1 + bcos\omega_m t)cos\omega_c t$$

其中ω_c为高频的电磁波频率，这个波又称为载波，ω_m为要传播的声音频率。因此上面的调制波是通过调整载波的振幅来传递声音的信息。而这个载波又可以写成

$$S = cos\omega_c t + \frac{1}{2}bcos(\omega_c + \omega_m)t + \frac{1}{2}bcos(\omega_c - \omega_m)t$$

可以看到调制波其实是三个不同频率的波的合成。其中$\omega_c \pm \omega_m$ 称为旁频带。为了有效的传播信息，载波的频率应该远高于要传播的声波频率。

相速度和群速度

对于两个不同频率，波长的波的叠加

$$y = 2A\cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2}x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\sin\left(\frac{k_1 + k_2}{2}x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$$

如果存在关系

$$\frac{\omega_1}{k_1} = \frac{\omega_2}{k_2}$$

则两列波是以相同的速度传播的。比例

$$v_p = \frac{\omega}{k}$$

称为相速度，它表征了波的相位的传播速度。

如果

$$\frac{\omega_1}{k_1} \neq \frac{\omega_2}{k_2}$$

则两列波是以不同的相速度传播的。如果ω_1, ω_2以及k_1, k_2之间的差异很小，则高频振动部分的速度为

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \Big/ \frac{k_1 + k_2}{2} \approx \frac{\omega}{k}$$

而调制波的速度为

$$v_m = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}$$

它被称为群速度，表征了信息的传播速度。在一般的情况下，群速度为

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

相速度仅是相位的传播速度，不会传递信息，因此是容许超真空中的光速的。而群速度是信息传递的速度，是不能超光速的。从无线电传播的角度说，载波只是一个载体，本身并不携带信息，而携带信息的是调制波。